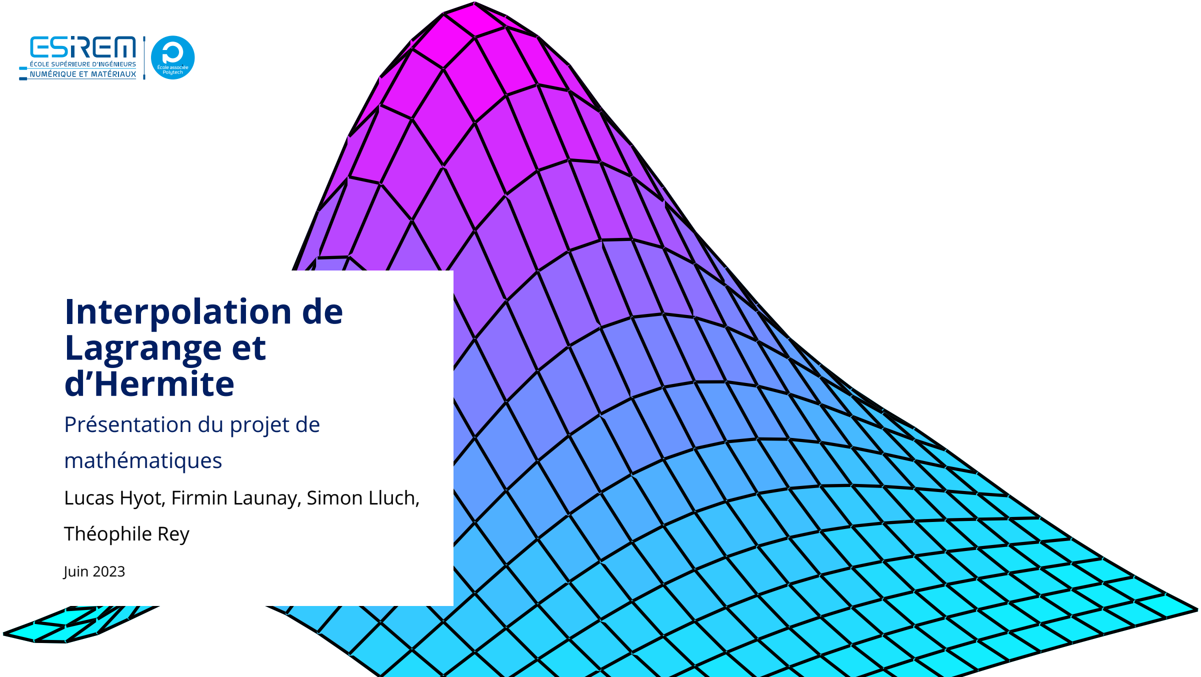


Interpolation de Lagrange et d’Hermite

Présentation du projet de mathématiques

Lucas Hyot, Firmin Launay, Simon Lluch, Théophile Rey

Juin 2023

Introduction

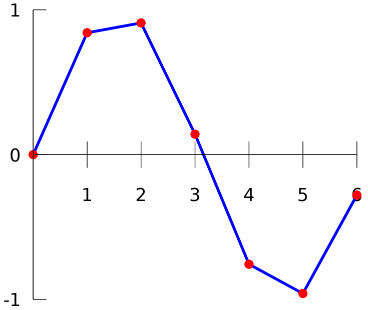
Qu’est ce que l’interpolation ?

- Outil mathématique très puissant permettant de reconstruire une fonction ou un ensemble de données manquantes à partir d’informations partielles ou échantillonnée.
- De nombreuses applications dans tous les domaines, notamment l’analyse de données, la modélisation numérique, la simulation ou encore l’analyse des marchés financiers (trading).

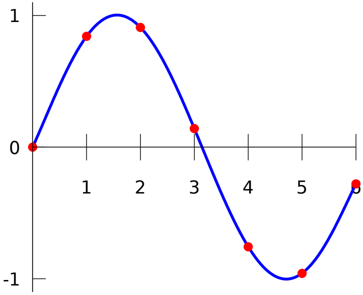
Durant la réalisation de ce projet, on appliquera les méthodes d’interpolation en mettant en évidence les caractéristiques des méthodes de Lagrange et d’Hermite.

Introduction

Méthodes d'interpolation



Interpolation linéaire



Interpolation polynomiale

ESIREM
ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS NUMÉRIQUE ET MATÉRIAUX
École associée Polytech

Rappels mathématiques

Définitions et propriétés des interpolations de Lagrange et d’Hermite.

Interpolation de Lagrange

Définition

Soit $n+1$ points distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $n+1$ valeurs correspondantes $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que nous souhaitons interpoler. Les polynômes de Lagrange associés à ces points sont les polynômes définis par :

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{X - x_0}{x_i - x_0} \times \cdots \times \frac{X - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \times \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \times \cdots \times \frac{X - x_n}{x_i - x_n}$$

Interpolation de Lagrange

Exemple

Exemple d'interpolation de Lagrange:

Pour les points $(x_0 = 1, y_0 = 3), (x_1 = -1, y_1 = 2), (x_2 = 2, y_2 = -1)$, on calcule d'abord les polynômes de Lagrange :

$$l_0(X) = \frac{(X+1)(X-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{1}{2}(X^2 - X - 2),$$

$$l_1(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{1}{6}(X^2 - 3X + 2),$$

$$l_2(X) = \frac{(X-1)(X+1)}{(2-1)(2+1)} = \frac{1}{3}(X^2 - 1).$$

Puis on calcule la fonction polynomiale passant par ces points :

$$L(X) = P(X) = 3l_0(X) + 2l_1(X) - l_2(X),$$

$$L(X) = P(X) = -\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 4.$$

Interpolation d'Hermite

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'une variable définie sur un segment $[a, b]$ et à valeurs réelles, et soient $n + 1$ points $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ distincts deux à deux dans $[a, b]$. L'objectif est de construire un polynôme P de degré minimal tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \quad P(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad P'(x_i) = f'(x_i).$$

Utilisation de Maple

Interpolation de Lagrange

Voici l'interpolation de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ avec la méthode de Lagrange

$\mathit{with}(\mathit{Student}[\mathit{NumericalAnalysis}]):$

$f(x) := \sin(x)$

$$f := x \mapsto \sin(x)$$

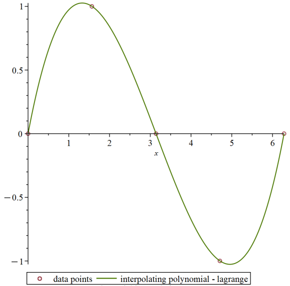
$L := \mathit{PolynomialInterpolation}\left(\left[[0, f(0)], \left[\frac{\text{Pi}}{2}, f\left(\frac{\text{Pi}}{2}\right)\right], [\text{Pi}, f(\text{Pi})], \left[\frac{3\cdot\text{Pi}}{2}, f\left(\frac{3\cdot\text{Pi}}{2}\right)\right], [2\cdot\text{Pi}, f(2\cdot\text{Pi})]\right], \mathit{independentvar} = x, \mathit{method} = \mathit{lagrange}\right)$

$$L := \mathit{POLYINTERP}\left(\left[[0, 0], \left[\frac{\pi}{2}, 1\right], [\pi, 0], \left[\frac{3\pi}{2}, -1\right], [2\pi, 0]\right], \mathit{independentvar} = x, \mathit{method} = \mathit{lagrange}, \mathit{INFO}\right)$$

$P := \mathit{expand}(\mathit{Interpolant}(L))$

$$P := -1. \times 10^{-11} x^4 + 0.0860040918 x^3 - 0.8105694692 x^2 + 1.697652728 x$$

$\mathit{Draw}(L)$



Polynomial interpolation.

Utilisation de Maple

Interpolation d'Hermite

Voici l'interpolation de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ avec la méthode de Hermite

$with(Student[NumericalAnalysis]):$

$f(x) := \sin(x)$

$$f := x \mapsto \sin(x)$$

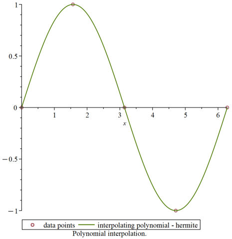
$L := PolynomialInterpolation\left(\left[[0, f(0), f'(0)], \left[\frac{Pi}{2}, f\left(\frac{Pi}{2}\right), f'\left(\frac{Pi}{2}\right)\right], [Pi, f(Pi), f'(Pi)], \left[\frac{3\cdot Pi}{2}, f\left(\frac{3\cdot Pi}{2}\right), f'\left(\frac{3\cdot Pi}{2}\right)\right], [2\cdot Pi, f(2\cdot Pi), f'(2\cdot Pi)]\right], independentvar = x, method = hermite\right)$

$$L := POLYINTERP\left(\left[[0, 0, 1], \left[\frac{\pi}{2}, 1, 0\right], [\pi, 0, -1], \left[\frac{3\pi}{2}, -1, 0\right], [2\pi, 0, 1]\right], independentvar = x, method = hermite, INFO\right)$$

$P := expand(Interpolant(L))$

$$P := x - 0.1706055656 x^3 + 0.001344237931 x^2 + 0.001460244872 x^6 + 0.00490583790 x^5 - 0.0005872641597 x^7 + 0.00006217340228 x^8 - 2.198934289 \times 10^{-6} x^9 + 0.00491905803 x^4$$

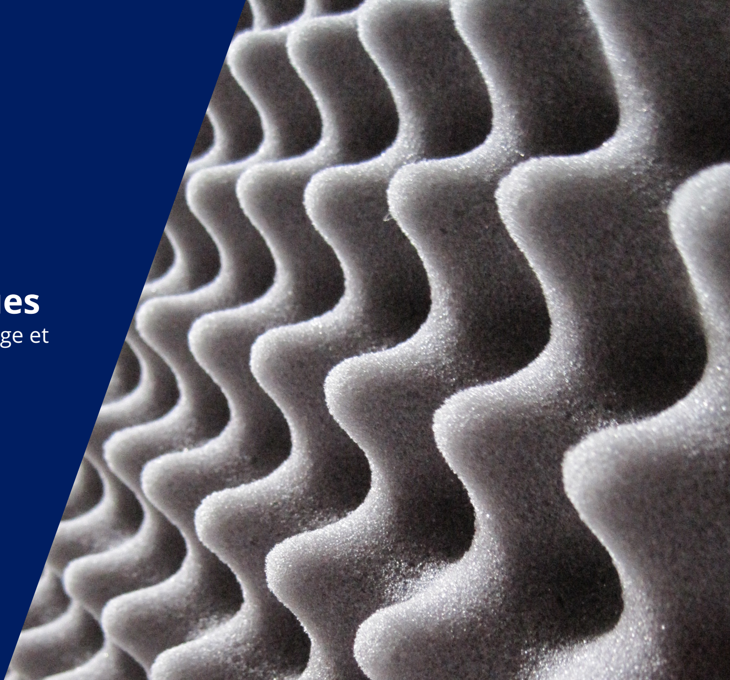
$Draw(L)$



Polynomial interpolation.

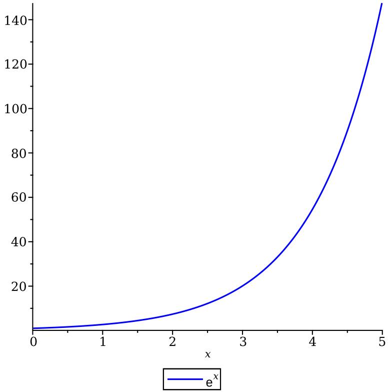
Application sur des fonctions mathématiques

Application des interpolations de Lagrange et d’Hermite à différentes fonctions.



Application sur des fonctions mathématiques

interpolation sur une fonction régulière

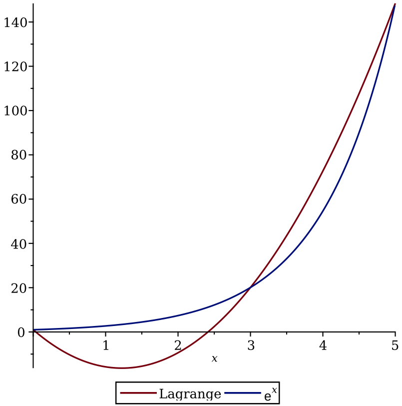


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction régulière : Lagrange

Premier essai : un point à chaque extrémité et un au milieu de l'intervalle

$$L = 11.56039309 \times x^2 - 28.31933362 \times x + 1$$

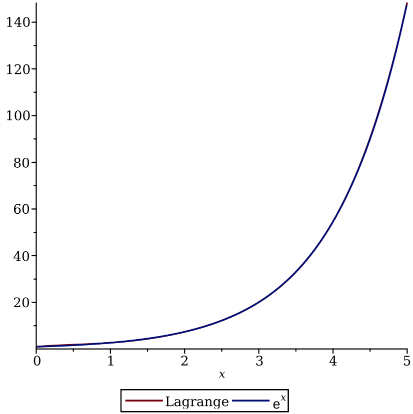


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction régulière : Lagrange

Deuxième essai : on subdivise nos sous-intervalles en deux

$$L = +0.124821886 \times x^5 - 0.88500170 \times x^4 + 3.03499877 \times x^3 - 3.306066488 \times x^2 + 2.74952932 \times x + 1$$

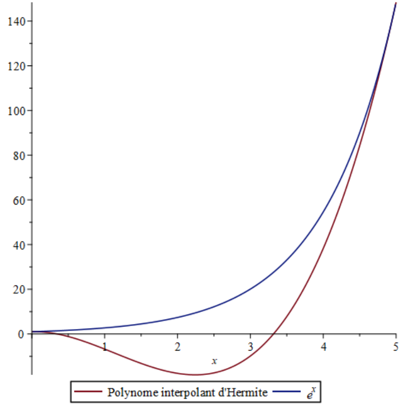


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction régulière : Hermite

Premier essai : un point à chaque extrémité

$$P(x) = 1 + x - 12.39305274x^2$$
$$+3.617915820x^3$$

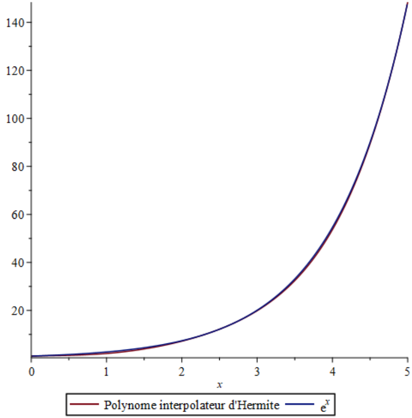


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction régulière : Hermite

Deuxième essai : on rajoute un au milieu de l'intervalle

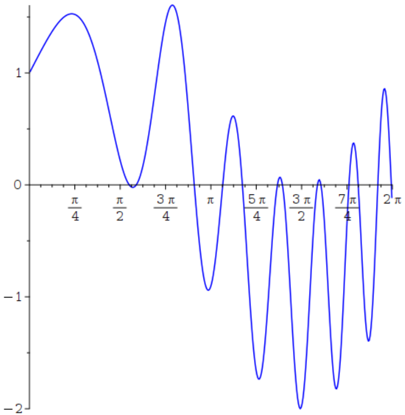
$$P(x) = 1 + x - 1.942141482x^2$$
$$+2.837126368 * x^3 - 0.9417935700x^4$$
$$+0.1359830020x^5$$



Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière

$$s(x) = cos(x^2) + sin(x)$$



Application sur des fonctions mathématiques

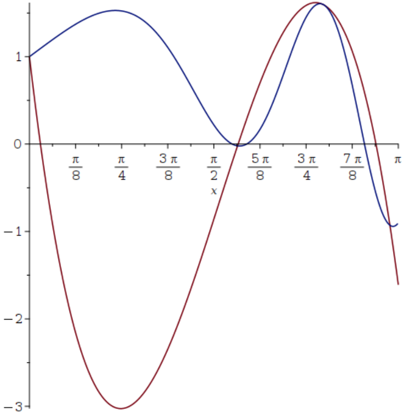
Interpolation sur une fonction irrégulière : Lagrange

Première essai :

$$L = -2.035750801 \times x^3 +$$

$$9.817495731 \times x^2 -$$

$$11.58118071 \times x + 1$$

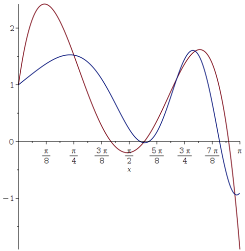


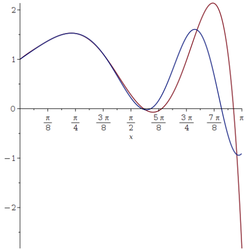
Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Lagrange

deuxième essai :

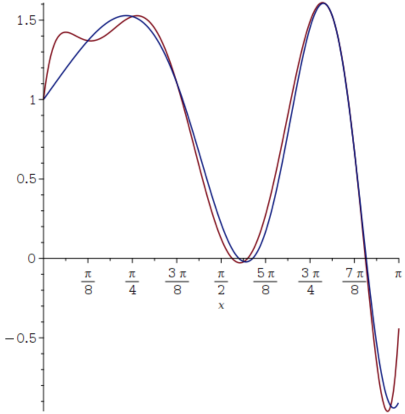
$$L = -0.413895259 \times x^6 + 2.65912679 \times x^5 - 5.40066209 \times x^4 + 3.76519634 \times x^3 - 1.42567809 \times x^2 + 1.191184354 \times x + 0.9999999999$$

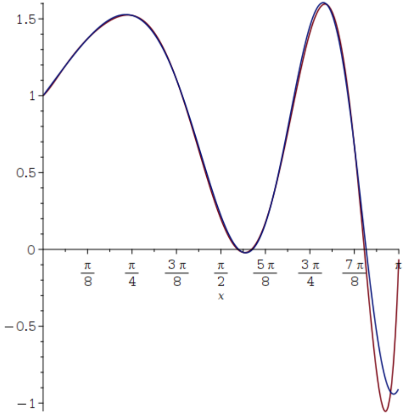




Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Lagrange





Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Lagrange

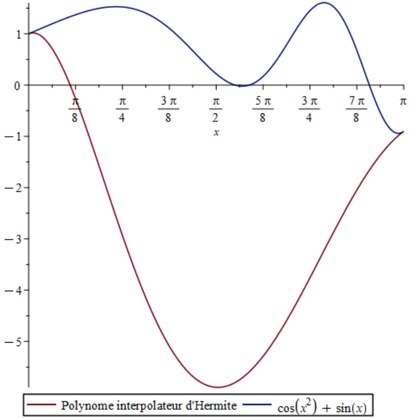
$$L = 1 + 0.69263985 \times x + 3.4554440 \times x^2 -$$
$$14.1212031 \times x^3 + 26.3502242 \times x^4 -$$
$$27.2010255 \times x^5 + 14.6725645 \times x^6 -$$
$$3.84304559 \times x^7 + 0.38561076 \times x^8$$

Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Hermite

Premier essai : un point à chaque extrémité

$$P(x) = 1 + x - 14.63755054x^2$$
$$+10.94752204x^3 - 2.801743683x^4$$
$$+0.2382067784x^5$$

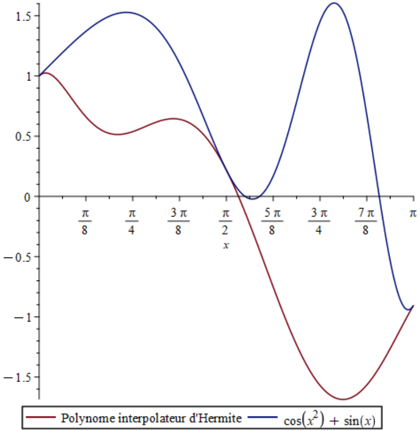


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Hermite

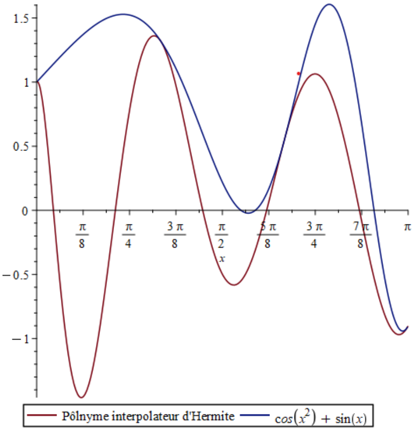
Deuxième essai :

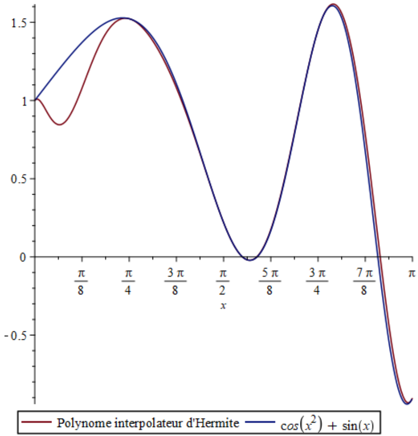
$$P(x) = 1 + x - 10.89092776x^2$$
$$+21.79572418x^3 - 18.31531914x^4$$
$$+7.315520299x^5 - 1.381794713x^6$$
$$+0.09948321937x^7$$



Application sur des fonctions mathématiques

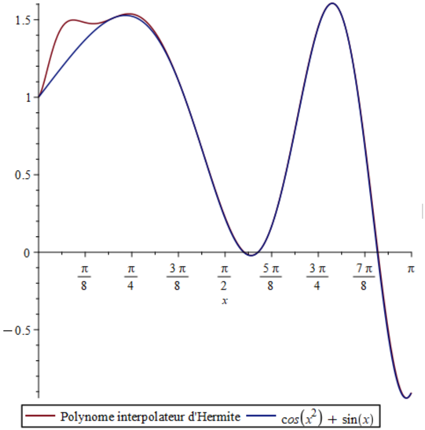
Interpolation sur une fonction irrégulière : Hermite

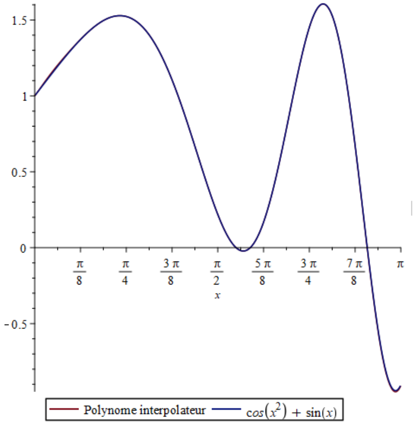




Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction irrégulière : Hermite





Application sur des fonctions mathématiques

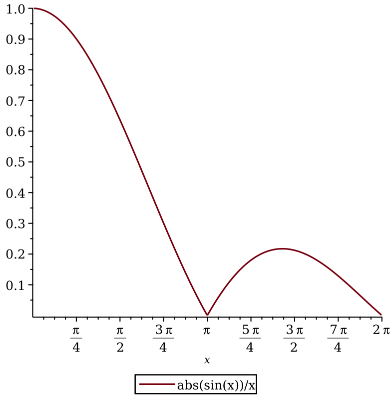
Interpolation sur une fonction irrégulière : Hermite

$$P(x) = 1 + x - 0.007699110077x^{15} + 0.1906664571x^{14} + 2.158828858x^{2}$$
$$+506.3101824x^{6} - 631.6056913x^{7} - 366.3027075x^{9} + 564.6288924x^{8}$$
$$+13.63375549x^{12} - 2.100972618x^{13} - 22.61200847x^{3} + 103.2279540x^{4}$$
$$-282.4491047x^{5} + 172.4712908x^{10} - 58.16161345x^{11}$$

Application sur des fonctions mathématiques

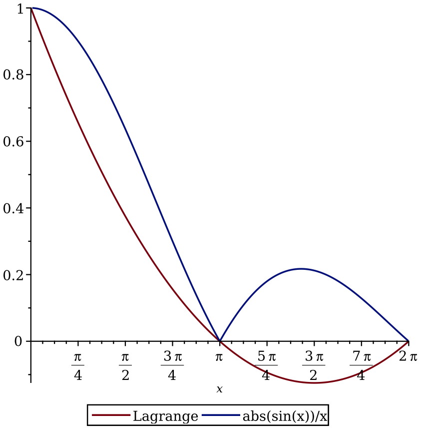
Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point

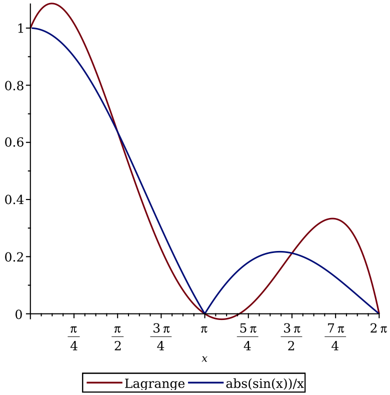
$$s(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$$



Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

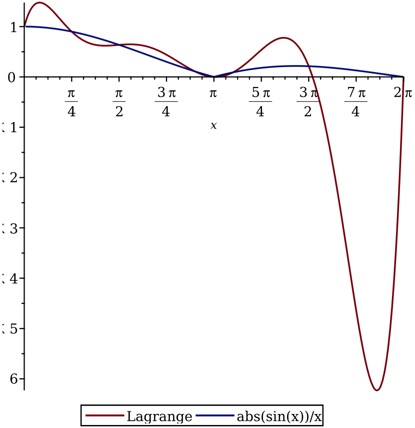


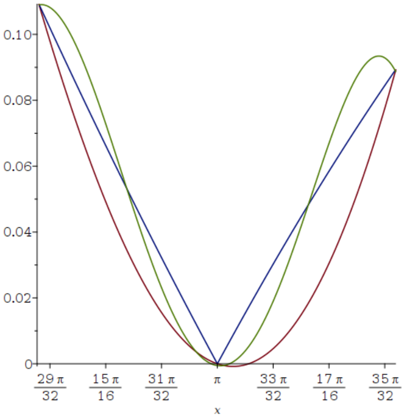


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

Augmentation du nombre de points au point critique :

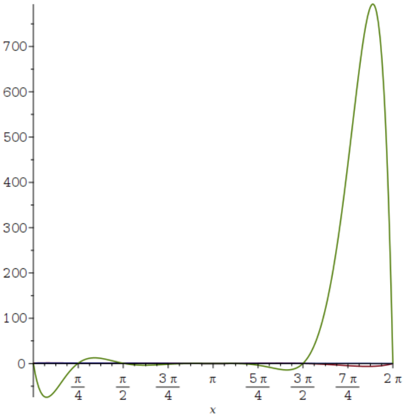


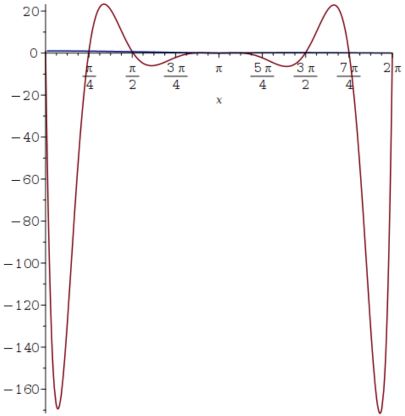


Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

Augmentation du nombre de points au point critique :





Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

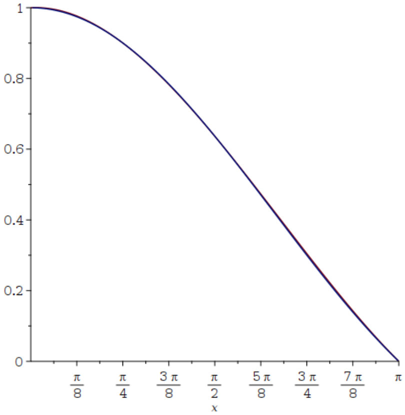
Augmentation du nombre de points au point critique :

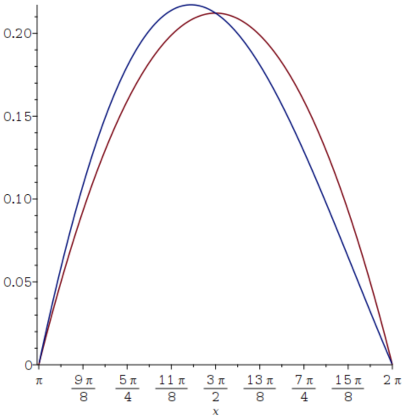
$$L = 0.09896081127 \times x^{10} - 3.107841680 \times x^{9} + 42.13451780 \times x^{8} -$$
$$322.9510007 \times x^{7} + 1537.830196 \times x^{6} - 4699.584171 \times x^{5} +$$
$$9166.493099 \times x^{4} - 10915.86998 \times x^{3} + 7115.071870 \times x^{2}$$
$$1898.645022 \times x + 1$$

Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

Interpolation par parties :

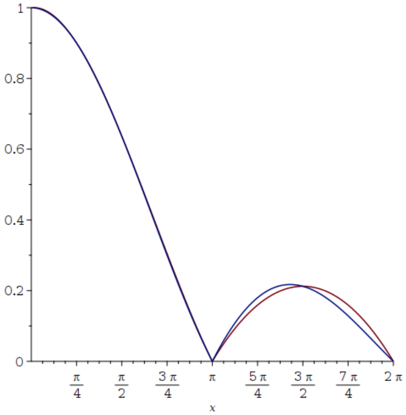




Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Lagrange

Interpolation par parties :



$$L1 = 0.0329233894 \times x^3 - 0.210517726 \times x^2 + 0.018110225 \times x + 1.$$

$$L2 := -0.08600409176 \times x^2 + 0.8105694687 \times x - 1.697652726$$

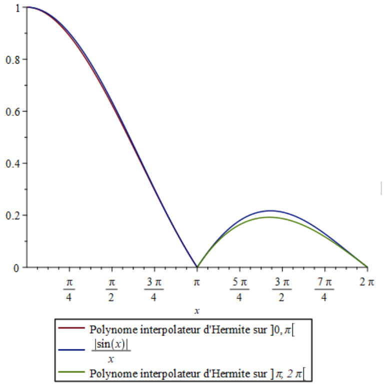
Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Hermite

Interpolation par parties : première essaie

$$P1 = 0.9999999647 + 0.0000719795909x$$
$$-0.2026881837x^2 + 0.03225882634x^3$$

$$P2 = -3.000954798 + 1.751261528x$$
$$-0.3040602845x^2 + 0.01613089909x^3$$



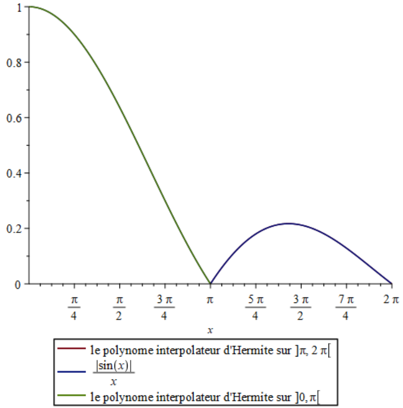
Application sur des fonctions mathématiques

Interpolation sur une fonction pas dérivable en un point: Hermite

Interpolation par parties : deuxième essaie

$$P1 = 1.000000002 - 3.366033210^{-6}x$$
$$-0.1649614121x^2 - 0.00372942212x^3$$
$$+0.01145298562x^4 - 0.001215199515x^5$$

$$P2 = 0.162908805 - 1.605221386x$$
$$+1.058015478x^2 - 0.2473925754x^3$$
$$+0.02435237554x^4 - 0.0008612890910x^5$$



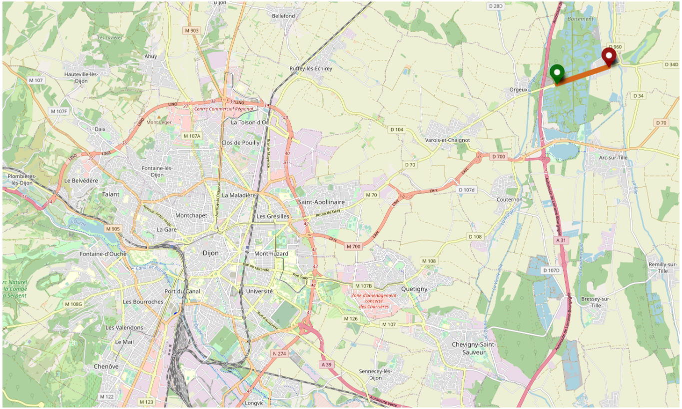
ESIREM
ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS
NUMÉRIQUE ET MATÉRIAUX
École associée Polytech

Application sur des mesures physiques

Application des interpolations de Lagrange et d'Hermite à des mesures physiques.

Vitesse lors d'un sprint en vélo

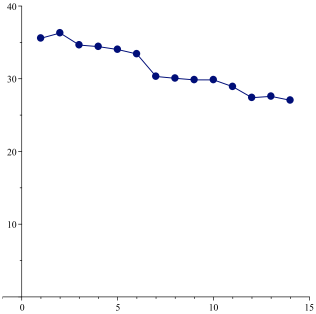
STRAVA



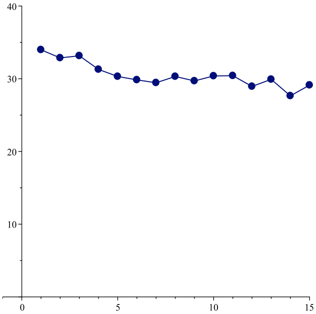
Situation géographique du lieu de mesure par rapport à Dijon

Vitesse lors d'un sprint en vélo

Données enregistrées



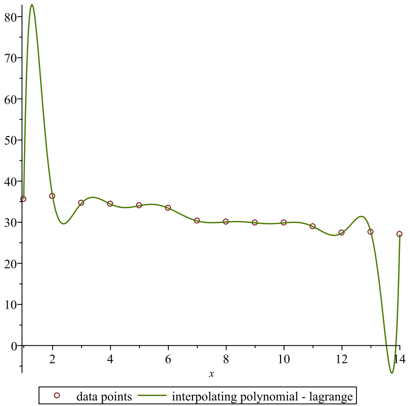
Sprint ouest → est : évolution de la vitesse



Sprint est → ouest : évolution de la vitesse

Vitesse lors d'un sprint en vélo

Interpolation de Lagrange (ouest $\rightarrow$ est)

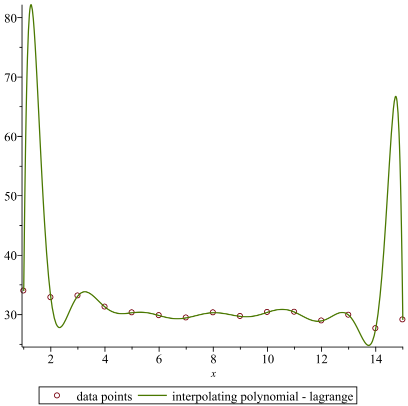


Polynomial interpolation.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{o}\rightarrow\mathrm{e}}(x) = {} & 15086.38132x - 4841.856010 \\
& + 3.668206807 \times 10^{-7}x^{13} + 14333.20081x^{3} \\
& - 6701.032086x^{4} + 2129.751956x^{5} \\
& - 476.6726374x^{6} + 76.49254137x^{7} \\
& - 8.841521671x^{8} + 0.7298635690x^{9} \\
& - 0.04196404120x^{10} + 0.001595946521x^{11} \\
& - 0.00003607443486x^{12} - 19562.54570x^{2}
\end{aligned}
$$

Vitesse lors d'un sprint en vélo

Interpolation de Lagrange (est $\to$ ouest)

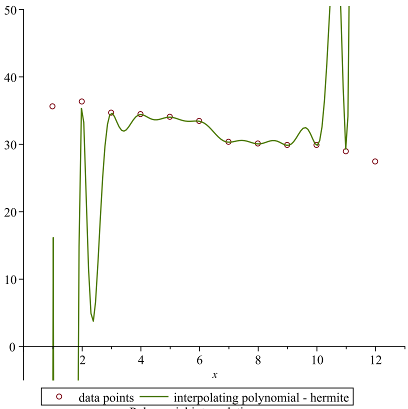


Polynomial interpolation.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{e}\to\mathrm{o}}(x) = {} & 19148.56876x - 3.625466825 \times 10^{-8}x^{14} \\
& + 4.074932640 \times 10^{-6}x^{13} - 0.0002074810990x^{12} \\
& + 0.006331121985x^{11} + 20053.33899x^{3} \\
& - 9981.278725x^{4} + 3413.862436x^{5} \\
& - 832.8590267x^{6} + 148.0101697x^{7} \\
& - 19.33809467x^{8} + 1.855316545x^{9} \\
& - 0.1290721804x^{10} - 5945.472020 \\
& - 25952.58129x^{2}
\end{aligned}
$$

Vitesse lors d'un sprint en vélo

Interpolation d'Hermite (ouest $\longrightarrow$ est)



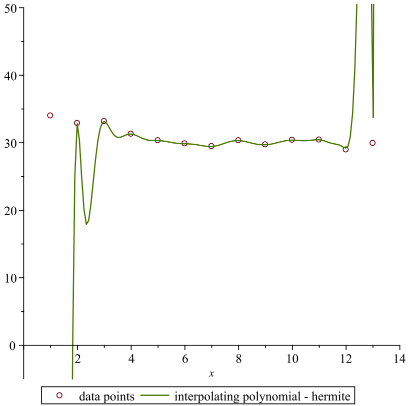
Polynomial interpolation.

(axe y tronqué)

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{o}\to\mathrm{e}}(x) = {} & 9.337499953 \times 10^{7} x - 1.543275746 \times 10^{7} \\
& + 4.357500760 \times 10^{-10} x^{23} - 6.513538275 \times 10^{-8} x^{22} \\
& + 4.594292453 \times 10^{-6} x^{21} - 0.0002033490712 x^{20} \\
& + 0.006335736697 x^{19} - 0.1477576413 x^{18} \\
& + 2.677502015 x^{17} - 38.62884467 x^{16} \\
& + 451.0282355 x^{15} - 4309.001067 x^{14} \\
& + 33922.75438 x^{13} + 1.191854291 \times 10^{6} x^{11} \\
& - 220930.6094 x^{12} + 1.957068332 \times 10^{7} x^{9} \\
& - 5.319525616 \times 10^{6} x^{10} + 4.370671222 \times 10^{8} x^{3} \\
& - 5.079731170 \times 10^{8} x^{4} + 4.330401813 \times 10^{8} x^{5} \\
& - 2.819893752 \times 10^{8} x^{6} + 1.441549857 \times 10^{8} x^{7} \\
& - 5.897203506 \times 10^{7} x^{8} - 2.585220787 \times 10^{8} x^{2}
\end{aligned}
$$

Vitesse lors d'un sprint en vélo

Interpolation d'Hermite (est $\rightarrow$ ouest)



(axe y tronqué)

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{e} \rightarrow \mathrm{o}}(x) = {} & 4.736652530 \times 10^{7} x - 7.744024831 \times 10^{6} \\
& + 6.932884472 \times 10^{-13} x^{25} - 1.250119354 \times 10^{-10} x^{24} \\
& + 1.069012755 \times 10^{-8} x^{23} - 5.767271760 \times 10^{-7} x^{22} \\
& + 0.00002202965884 x^{21} - 46.17515654 x^{16} \\
& - 0.2576016927 x^{18} + 3.795368058 x^{17} \\
& - 0.0006338285437 x^{20} + 0.01426702902 x^{19} \\
& - 3963.802620 x^{14} + 467.6677728 x^{15} \\
& - 2.706086038 \times 10^{8} x^{4} + 2.283418021 \times 10^{8} x^{3} \\
& - 1.581015036 \times 10^{8} x^{6} + 2.361372864 \times 10^{8} x^{5} \\
& - 3.552314909 \times 10^{7} x^{8} + 8.352728336 \times 10^{7} x^{7} \\
& - 3.538758730 \times 10^{6} x^{10} + 1.233979579 \times 10^{7} x^{9} \\
& - 168447.6714 x^{12} + 844261.6207 x^{11} \\
& + 28195.15062 x^{13} - 1.328970892 \times 10^{8} x^{2}
\end{aligned}
$$

Copie d'un gigaoctet de données

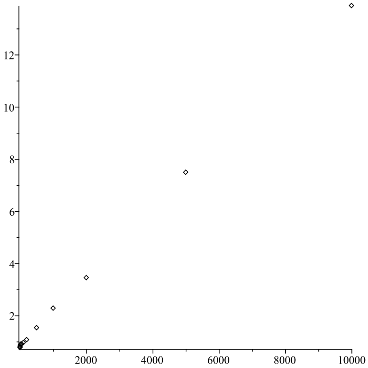
1 Go de données répartis en 1, 2, 5, 10, 20, 100, 200, 500, 1 000, 2 000, 5 000 puis 10 000 fichiers.

Temps de copie mesurés à l'aide de la commande `cp`, dans un environnement WSL.

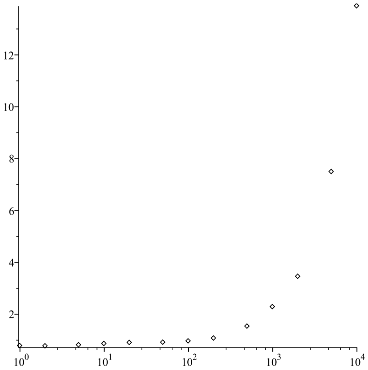
Évolution du temps de copie ?

Copie d’un gigaoctet de données

Données enregistrées



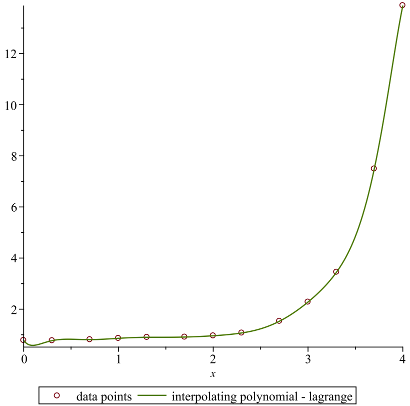
Temps de copie (échelles linéaires)



Temps de copie (axe x en échelle logarithmique)

Copie d'un gigaoctet de données

Interpolation de Lagrange en échelle logarithmique

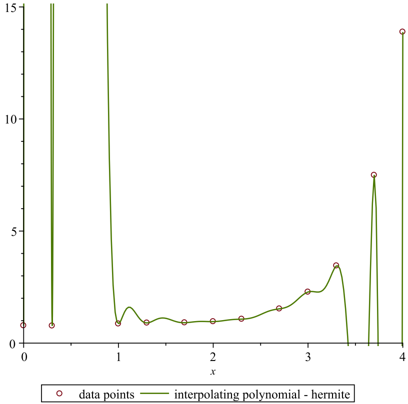


Polynomial interpolation.

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 5.11309850x + 44.4320485x^2 \\
& - 155.940611x^3 + 298.425086x^4 \\
& - 349.717714x^5 + 266.000191x^6 \\
& - 134.930055x^7 + 45.8410638x^8 \\
& - 10.2387718x^9 + 1.42996265x^{10} \\
& - 0.111779192x^{11} + 0.00365844375x^{12} \\
& + 0.7799999995
\end{aligned}
$$

Copie d'un gigaoctet de données

Interpolation d'Hermite en échelle logarithmique



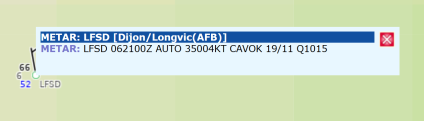
Polynomial interpolation.

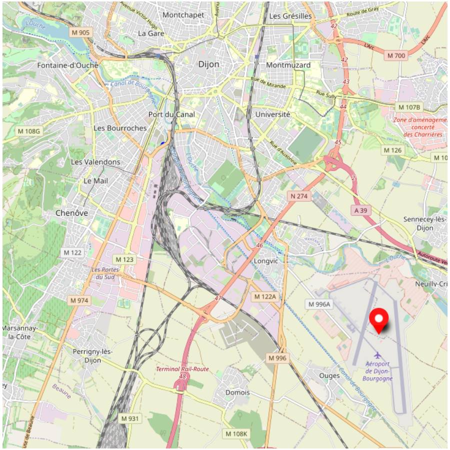
(axe y tronqué)

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 0.80883816x - 3.249562653 \times 10^8 x^{15} \\
& + 1.786949270 \times 10^6 x^2 + 151.2377224x^{22} \\
& - 475996.4115x^{19} - 2.839285433 \times 10^7 x^3 \\
& + 2.008918671 \times 10^8 x^4 - 8.486560784 \times 10^8 x^5 \\
& + 2.422461801 \times 10^9 x^6 - 5.004903281 \times 10^9 x^7 \\
& + 7.814079537 \times 10^9 x^8 - 9.488644187 \times 10^9 x^9 \\
& + 9.140097242 \times 10^9 x^{10} - 7.079204535 \times 10^9 x^{11} \\
& + 4.447754451 \times 10^9 x^{12} + 8.985781920 \times 10^7 x^{16} \\
& - 2.278249403 \times 10^9 x^{13} + 9.529591480 \times 10^8 x^{14} \\
& + 0.7800001 - 3412.352579x^{21} + \\
& + 48136.31435x^{20} - 3.152670068x^{23} \\
& + 3.506269850 \times 10^6 x^{18} - 1.995735194 \times 10^7 x^{17}
\end{aligned}
$$

Température au cours d’une nuit et d’une matinée

METAR





Situation géographique du lieu de mesure par rapport à Dijon

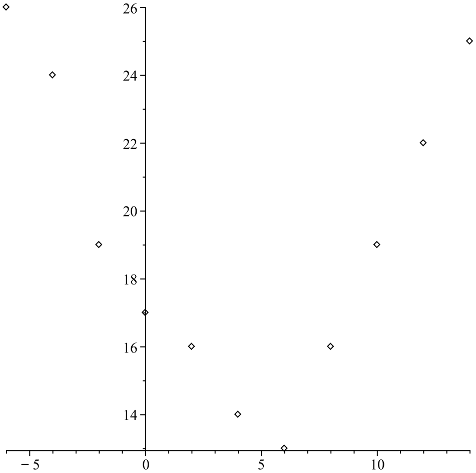
Température au cours d’une nuit et d’une matinée

Données enregistrées

2 juin 2023, 18h

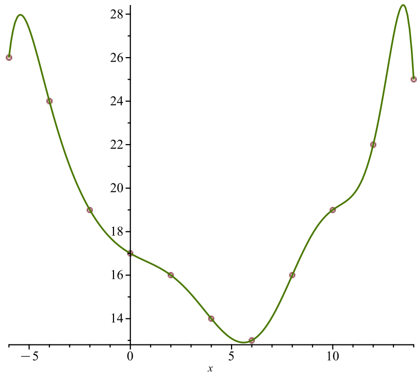
↓

3 juin 2023, 14h



Température au cours d'une nuit et d'une matinée

Interpolation de Lagrange

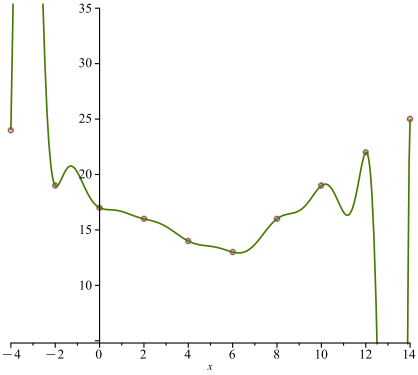


Polynomial interpolation.

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 2.610410135 \times 10^{-8} x^{10} - 0.05623002022 x^3 \\
& - 0.005173025574 x^4 + 0.0009123624568 x^5 \\
& + 0.0003905345915 x^6 - 0.0000251245243 1x^7 \\
& - 7.427558859 \times 10^{-6} x^8 + 8.746219538 \times 10^{-7} x^9 \\
& - 0.5382936511 x + 17.0 \\
& + 0.1399255945 x^2
\end{aligned}
$$

Température au cours d'une nuit et d'une matinée

Interpolation d'Hermite



Polynomial interpolation.

(axe y tronqué)

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & 16.99999 - 4.712756012 \times 10^{-13}x^{19} \\
& + 4.400827060 \times 10^{-11}x^{18} - 1.791643517 \times 10^{-9}x^{17} \\
& + 4.129342868 \times 10^{-8}x^{16} - 5.798115558 \times 10^{-7}x^{15} \\
& + 4.820238848 \times 10^{-6}x^{14} - 0.0000179300370x^{13} \\
& - 0.0000566544506x^{12} - 0.003402176021x^{10} \\
& + 0.0009349467200x^{11} - 0.5261852422x^{4} \\
& - 1.527617937x^{3} - 0.1670026673x^{6} \\
& + 0.884223236x^{5} + 0.0584607698x^{8} \\
& - 0.1219872155x^{7} - 0.00333690138x^{9} \\
& + 2.068786988x^{2} - 1.000008x
\end{aligned}
$$

ESIREM École supérieure d'ingénieurs numérique et matériaux — École associée Polytech

Conclusion

Interpolation de Lagrange

- Pour fonction relativement régulière (pas de saut brusque)
- Pas trop de surprise, interpolation globalement fiable

Interpolation d'Hermite

- Très efficace sur fonction à variation brusque
- Peu adaptée aux mesures physiques (avec données plus lisses ?)

https://bay.firminlaunay.me/Projets_ESIREM/Interpolation_de_Lagrange_et_d_Hermite.pdf

Sources

- Cours de Pr. Jacquemard.
- *Interpolation lagrangienne*, Wikipédia en français
- *Interpolation d'Hermite*, Wikipédia en français
- *Comparison between some techniques of interpolators: An application in engineering*, Scientia Et Technica, vol. 24, no. 1, pp. 173-178, 2019, Universidad Tecnológica de Pereira
- *Maple Introduction: Interpolation (partie 1)*, Aide-Math, YouTube
- Contributeurs d'OpenStreetMap
- Berland, Public domain, via Wikimedia Commons
- U.S. Aviation Weather Center
- Metar & Taf

`https://bay.firminlaunay.me/Projets_ESIREM/Interpolation_de_Lagrange_et_d_Hermite.pdf`

Merci de votre attention !